DISCRETE MATHEMATICS 7 (1974) 141–149.

UNE PROPRIETE COMBINATOIRE DES COUPLES DE PERMUTATIONS

André LENTIN

Académie de Paris, Université René Descartes, U.E.R. de Mathématiques, Logique Formelle et Informatique, Sorbonne, 12 rue Cujas, 75005 Paris, France

Reçu le 13 mars 1973

Résumé. Appelons *bipermutation* (bp) d'un ensemble donné tout couple de permutations de celui-ci, par exemple (*bdace*, *dbeac*). On définit sur les bp. deux opérations unaires "à gauche" et leurs duales "à droite", opérations qui s'introduisent naturellement en théorie des équations dans les monoïdes libres. On peut alors associer à une bp. deux familles de bp. et on démontre que ces familles ont le même nombre de bp., bien qu'elles ne soient pas en général isomorphes.

1. Introduction. Résultat principal

1.1. Notations. X étant un ensemble fini non vide (de *lettres*) et X^* le monoïde libre de base X, on désignera par $X!$ l'ensemble des *mots* $f \in X^*$ tels que tout élément de X présente exactement une occurrence dans f. On s'autorisera à appeler *permutations* (de X) les éléments de $X!$ et *bipermutations* ceux de $X! \times X!$.

Soient alors $|X| = k$ le cardinal de X, $[k]$ l'ensemble $\{1, ..., k\}$ et $(f, f') \in X! \times X!$ une bipermutation. La surjection $X \to [k]$ obtenue en envoyant sur l'entier i la $i$ème lettre de f (lu de gauche à droite) se prolonge en un morphisme $X^* \to [k]^*$. Celui-ci envoie la permutation f' sur un élément de $[k]!$ que l'on appellera le *type* de (f, f').

Exemples. Pour $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ les bipermutations

$$(a\,b\,c\,d\,e\,f,\ f\,c\,b\,e\,d\,a) \quad \text{et} \quad (c\,d\,e\,f\,a\,b,\ b\,e\,d\,a\,f\,c)$$

sont *isotypes* et de type 6 3 2 5 4 1.

1.2. Opérations. L'étude des équations dans les monoïdes libres [1, 2] conduit à munir $X! \times X!$, pour $|X| \geq 2$, de certaines opérations unaires.

A tout couple $(x, y) \in X \times X$ avec $x \neq y$, on associe l'opération désignée par x/y et définie de la façon suivante:

(i) si $B \in X! \times X!$ est de la forme

$$B = (f_1\, x f_2\, y f_3, g_1\, x g_2\, y g_3), \quad f_i, g_i \in X^*, \qquad i = 1, 2, 3,$$

alors $(x/y)B = (f_1\, y f_3\, x f_2, g_1\, y g_3\, x g_2)$;

(ii) sinon l'opération x/y n'est pas définie

Exemples. Soient $X = \{a, b, c, d, e\}$ et

$$B = (a\,b\,c\,d\,e, d\,b\,a\,e\,c)\ ;$$

alors $(b/e)B = (a\,e\,b\,c\,d, d\,e\,c\,b\,a)$, tandis que les opérations e/b et e/d ne sont pas définies pour B.

1.3. Systèmes nodaux. B étant une bipermutation on désignera par $\mathfrak{N}(B)$, la plus petite partie de $X! \times X!$ contenant B et fermée pour les opérations x/y.

L'ensemble $\mathfrak{N}(B)$ muni des opérations x/y définit un système algébrique que l'on désignera par le même symbole $\mathfrak{N}(B)$ que son ensemble sous-jacent. Pour des raisons liées à son origine (voir [2]), le système $\mathfrak{N}(B)$ sera appelé le *premier système nodal* attaché à la bipermutation B.

Il est clair que les conditions $(x/y)B = B'$ et $(y/x)B' = B$ s'impliquent mutuellement. Il est donc loisible de représenter un système nodal $\mathfrak{N}(B)$ par un graphe symétrique dont les sommets sont les éléments de l'ensemble $\mathfrak{N}(B)$ et dont les arêtes sont valuées chacune par une paire $\{x, y\}$.

A titre d'exemple, nous traiterons ici le cas où $|X| = 3$.

1.4. Systèmes nodaux pour $|X| = 3$. Pour $X = \{a, b, c\}$ il y a 3! types de bipermutations, et l'on obtient les systèmes suivants.

(1) Pour $B_0 = (a\,b\,c, a\,b\,c)$, $\mathfrak{N}(B_0)$ contient $3! = 6$ bipermutations isotypes et de types 1 2 3 (Fig. 1).

(2) Pour $B_r = (a\,b\,c, c\,b\,a)$, $\mathfrak{N}(B_r)$ se réduit à cette seule bipermutation, de type 3 2 1.

(3) Pour $B_d = (a\,b\,c, b\,a\,c)$, $\mathfrak{N}(B_d)$ contient trois bipermutations correspondant respectivement aux types 2 1 3, 3 1 2, 2 3 1 (Fig. 2).

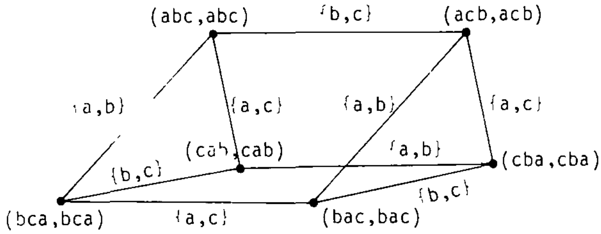

Fig. 1.

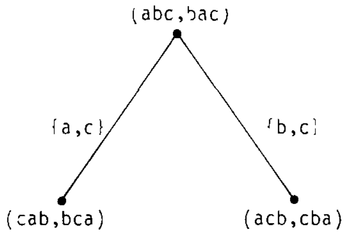

Fig. 2

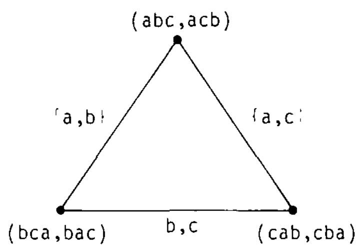

Fig. 3

(4) Pour $B_g = (a\,b\,c, a\,c\,b)$, $\mathfrak{N}(B_g)$ contient trois bipermutations isotypes, de type 1 3 2 (Fig. 3).

Les six types possibles de bipermutation ayant été tous obtenus, les quatre systèmes précédents fournissent donc un représentant pour chacune des quatre classes d'isomorphisme possibles de systèmes.

(On voit immédiatement que pour $|X|$ quelconque on aura toujours un système formé par toutes les bipermutations (f, f), comme $\mathfrak{N}(B_0)$, et les systèmes formés chacun d'une bipermutation $(f, \tilde{f})$, comme $\mathfrak{N}(B_r)$, où $\tilde{f}$ désigne l'image en miroir de f.)

1.5. Opérations duales. Seconds systèmes nodaux. On définit l'opération $\tilde{y}/\tilde{x}$, duale de x/y, de la façon suivante:

(i) si B est de la forme déjà considérée,

$$B = (f_1\, x f_2\, y f_3, g_1\, x g_2\, y g_3)\,,$$

alors $B(\widetilde{y}/\widetilde{x}) = (f_2\, y f_1\, x f_3, g_2\, y g_1\, x g_3)$;
(ii) sinon l'opération $\widetilde{y}/\widetilde{x}$ n'est pas définie.

On désignera par $\widetilde{\mathfrak{N}}\,(B)$ la plus petite partie de $X! \times X!$ contenant B et fermée pour les opérations $\widetilde{y}/\widetilde{x}$. L'ensemble $\widetilde{\mathfrak{N}}\,(B)$ muni de ces opérations est le *second système nodal attaché à* B, on le désignera encore par le même symbole $\widetilde{\mathfrak{N}}\,(B)$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal.

1.6. Théorème. *Les deux systèmes nodaux attachés à une même bipermutation comportent le même nombre de bipermutations.*

Avant d'en donner la démonstration, vérifions cette proposition dans le cas $|X| = 3$. L'étude faite en 1.4 montre immédiatement que:

(1) pour $B_0 = (a\,b\,c, a\,b\,c)$, $\mathfrak{N}\,(B_0)$ et $\widetilde{\mathfrak{N}}\,(B_0)$ sont isomorphes,

(2) même conclusion pour $B_r = (a\,b\,c, c\,b\,a)$;

(3), (4) pour $B_d = (a\,b\,c, b\,a\,c)$ et $B_g = (a\,b\,c, a\,c\,b)$, $\mathfrak{N}\,(B_g)$ est isomorphe à $\widetilde{\mathfrak{N}}\,(B_d)$ et $\mathfrak{N}\,(B_d)$ est isomorphe à $\widetilde{\mathfrak{N}}\,(B_g)$. Tous ces systèmes ont donc trois éléments.

Cependant il convient de noter que $\mathfrak{N}\,(B_g)$ *n'est pas isomorphe à* $\widetilde{\mathfrak{N}}\,(B_g)$ et que ces deux systèmes *n'ont pas des groupes d'isotypies isomorphes* Cette remarque a une portée générale. on peut prouver que l'isomorphisme est l'exception, et non la règle.

2. Démonstration

2.1. Remarque. Désignant toujours par $\widetilde{f}$ l'image en miroir du mot f et, pour $B = (f, g)$, posant $\widetilde{B} = (\widetilde{g}, \widetilde{f})$, il est clair que l'on a en général (comme on l'a vu précédemment sur un exemple):

$$B\,\frac{\widetilde{y}}{\widetilde{x}} = \widetilde{\left(\frac{y}{x}\,\widetilde{B}\right)}\,.$$

Il en résulte que le système $\widetilde{\mathfrak{N}}\,(B)$ est isomorphe au système $\mathfrak{N}\,(\widetilde{B})$. Le Théorème 1.6 est donc équivalent au suivant.

2.2. Théorème. *Les systèmes nodaux* $\mathfrak{N}(B)$ *et* $\mathfrak{N}(\widetilde{B})$ *comprennent le même nombre de bipermutations.*

C'est ce dernier théorème que nous allons établir.

2.3. Lemme. *Si* $B' = (t/x)B$ *et* $B'' = (x/y)B' = (x/y)(t/x)B$ *sont définies, alors* $(t/y)B$ *l'est aussi et l'on a:*

$$\frac{t}{y}\,B = \frac{x}{y}\,\frac{t}{x}\,B$$

(*ce résultat explique la notation adoptée pour l'opération*).

Preuve. Puisque $(x/t)B'$ et $(x/y)B'$ existent, chaque membre de B' est de la forme $h_1\,x\,h_2\,y\,h_3$, la lettre t figurant dans $h_2\,h_3$. Deux cas sont donc à examiner

(i) si B' contient un membre de la forme

$$h_1\,x\,h_2'\,t\,h_2''\,y\,h_3\ ,$$

le membre homologue de B est de la forme

$$h_1\,t\,h_2''\,y\,h_3\,x\,h_2'\ ,$$

et celui de B'' de la forme

$$h_1\,y\,h_3\,x\,h_2'\,t\,h_2''\ ;$$

(ii) si B' contient un membre de la forme

$$h_1\,x\,h_2\,y\,h_3'\,t\,h_3''\ ,$$

le membre homologue de B est de la forme

$$h_1\,t\,h_3''\,x\,h_2\,y\,h_3'\ ,$$

et celui de B'' de la forme

$$h_1\,y\,h_3'\,t\,h_3''\,x\,h_2\ .$$

On voit donc que l'on a toujours $(t/y)B = B''$.

2.4. Système contraint. Soient $B = (f, g) \in X! \times X!$ et $a \in X$. On désignera par $\mathfrak{R}_a(B)$ la plus petite partie de $X! \times X!$ contenant B et fermée pour les opérations x/y avec $x, y \neq a$.

En vertu de la définition même de l'opération x/y il est clair que:

(1) si a est l'initiale de f (resp. g), alors a reste l'initiale de tous les membres gauches (resp. droits) des bipermutations de $\mathfrak{R}_a(B)$;

(2) si f (resp. g) est de la forme $h_1\ u\, a\, h_2$, avec $u \in X$, $h_1, h_2 \in X^*$, alors dans tous les membres gauches (resp. droits) des bipermutations de $\mathfrak{R}_a(B)$, u reste le prédécesseur immédiat de a.

En résumé $\mathfrak{R}_a(B)$ est isomorphe à $\mathfrak{R}(\overline{B}_a)$, où $\overline{B}_a$ est la bipermutation qui procède de B par effacement de a. De plus $\mathfrak{R}_a(B)$ est reconstituable à partir de $\mathfrak{R}(\overline{B}_a)$ grâce à la connaissance des lettres qui précèdent (éventuellement) a dans chaque membre.

$\mathfrak{R}_a(B)$ est le système engendré par B *avec contrainte sur a.*

2.5. Lemme. *Soient $f, g \in X!$ et soit $\beta \notin X$ un élément distingué. Le cardinal d'un ensenble E étant toujours désigné par $|E|$, on a:*

$$|\mathfrak{R}(\beta f, \beta g)| = (1 + |X|)\ |\mathfrak{R}(f, g)|\ .$$

Preuve. $\mathfrak{R}(\beta f, \beta g)$ contient d'abord les $|\mathfrak{R}(f, g)|$ bipermutations du système contraint $\mathfrak{R}_\beta(\beta f, \beta g)$, lesquelles ont toutes β aux deux initiales.

Soit $B = (\beta f_1\ x f_2, \beta g_1\ x g_2)$ l'une d'elles, alors $(\beta/x)B = (x f_2\ \beta f_1,$ $x g_2\ \beta g_1)$ admet x aux deux initiales. On forme donc, à partir de B, $|X|$ bipermutations nouvelles et distinctes. D'autre part si $B, B' \in \mathfrak{R}_\beta(\beta f, \beta g)$ sont différentes, $(\beta/x)B$ et $(\beta/x)B'$ le sont aussi. On a donc formé, à partir de $\mathfrak{R}_\beta(\beta f, \beta g)$, une "nouvelle génération" de bipermutations de cardinal $|X|\ |\mathfrak{R}(f, g)|$, soit, avec celles de $\mathfrak{R}_\beta(\beta f, \beta g)$, une famille de cardinal $(1 + |X|)\ |\mathfrak{R}(f, g)|$.

Or il n'y a pas d'autres bipermutations dans $\mathfrak{R}(\beta f, \beta g)$. Soit en effet $B \in \mathfrak{R}_\beta(\beta f, \beta g)$, où $B = (\beta f_1\ x f_2, \beta g_1\ x g_2)$ et soit $y \in X$, $y \neq x$. x/y est définie pour $(\beta/x)B = (x f_2\ \beta f_1, x g_2\ \beta g_1)$. Mais en vertu du lemme 2.3, on a

$$B_1 = \frac{\beta}{y} B = \frac{x}{y} \frac{\beta}{x} B\ ,$$

ce qui montre que B_1 avait déjà été obtenue dans la "nouvelle génération".

2.6. Remarque. Le Théorème 2.2 résulterait immédiatement de la proposition suivante:

2.7. Proposition. *Les systèmes* $\mathfrak{N}(\beta f, \beta g)$ *et* $\mathfrak{N}(\beta\tilde{g}, \beta\tilde{f})$ *sont isomorphes.*

On aurait alors en effet

$$|\mathfrak{N}(f,g)| = \frac{|\mathfrak{N}(\beta f, \beta g)|}{1+|X|} = \frac{|\mathfrak{N}(\beta\tilde{g}, \beta\tilde{f})|}{1+|X|} = |\mathfrak{N}(\tilde{g}, \tilde{f})| .$$

Nous allons démontrer en fait une proposition plus forte que la Proposition 2.7 en ce sens que nous exhiberons un isomorphisme de $\mathfrak{N}(\beta\tilde{g}, \beta\tilde{f})$ vers $\mathfrak{N}(\beta f, \beta g)$. Cet isomorphisme est lié à une certaine substitution circulaire opérant sur $X \cup \{\beta\}$, qui fait l'objet de la définition ci-après.

2.8. Définition. Soit $B = (f, g) \in X! \times X!$. Désignons par $f^{(i)}$, $1 \leq i \leq k = |X|$, la $i$ème lettre de f et écrivons x_k pour $f^{(k)}$.

Alors, γ étant la substitution circulaire:

$$\gamma = (\beta, f^{(1)}, \ldots, f^{(i)}, \ldots, f^{(k)}) ,$$

posons $\hat{f} = \tilde{f} \cdot \gamma^{-1}$, $\hat{g} = \tilde{g} \cdot \gamma^{-1}$, d'où

$$(\beta\tilde{g}, \beta\tilde{f}) \cdot \gamma^{-1} = (x_k \hat{g}, x_k \hat{f}) .$$

Remarquons d'ailleurs que l'on a:

$$(\beta\tilde{f}) \cdot \gamma^{-1} = \widetilde{(\beta f)} = \tilde{f}\beta .$$

Avec ces notations on peut enfin énoncer la proposition suivante, qui implique le résultat principal.

2.9. Proposition. *On a*

$$\mathfrak{N}(\beta f, \beta g) = \mathfrak{N}(x_k \hat{g}, x_k \hat{f}) .$$

Preuve. Par récurrence.

(1) Pour $|X| = 1$, la seule (aux isomorphismes près) possibilité est

$$X = \{a\}, \quad (f, g) = (a, a)$$
$$(\beta f, \beta g) = (\beta a, \beta a), \quad (\beta\tilde{g}, \beta\tilde{f}) = (\beta a, \beta a),$$
$$(x_k \hat{g}, x_k \hat{f}) = (a\beta, a\beta)\ .$$

Mais l'on a:

$$\frac{\beta}{a}\ (\beta a, \beta a) = (a\beta, a\beta)\ .$$

(2) Supposons la proposition établie pour $|X| \leq k$.

Par commodité nous conviendrons que l'ensemble X est l'ensemble $[k]$ des k premiers naturels non nuls, nous conviendrons que $\beta = 0$ et que l'on a

$$f = 1\ 2 \ldots k\ ,$$

ce qui est toujours loisible. D'autre part nous écrirons

$$g = \overline{1}\ \overline{2} \ldots \overline{i} \ldots \overline{k}\ , \qquad \overline{i} \in [k]\ .$$

L'hypothèse de récurrence est donc que le système $\mathfrak{N}\ (0f, 0g)$ contient la bipermutation:

$$(k\overline{k} - 1 \ldots \overline{2} - 1\ \overline{1} - 1, k\,k - 1 \ldots 2\ 1\ 0)\ .$$

Soit alors, avec $f', g' \in [k+1]!$ la bipermutation $B = (0f', 0g')$ où:

$$f' = 1\ 2 \ldots k\,k + 1 \qquad \text{et} \qquad g' = \overline{1} \ldots \overline{\lambda}\ k + 1 \ldots \overline{k + 1}\ .$$

Le prédécesseur dans g' de $k + 1$ a été désigné par $\overline{\lambda}$, ce qui implique $k + 1 = \overline{\lambda + 1}$, soit $k = \overline{\lambda + 1} - 1$. Le prédécesseur de $k + 1$ dans f' est naturellement k.

L'application de l'hypothèse de récurrence au système contraint $\mathfrak{N}_{k+1}(0f', 0g')$, compte tenu des observations faites en 2.4, implique que ce système contient la bipermutation:

$$B_0 = (k\,k + 1\,\overline{k} - 1\,h\,\overline{\lambda} - 1\,h'\,\overline{1} - 1,\ k\,k - 1\,h''\,\overline{\lambda}\,k + 1\,\overline{\lambda} - 1\,h'''0);$$

avec $h, h', h'', h''' \in [k-2]^*$.

Or on a

$$B_1 = \frac{k}{k+1} B_0 = (k+1\,\overline{k}-1\,h\,\overline{\lambda}-1\,h'\,\overline{1}-1\,k,\\ k+1\,\overline{\lambda}-1\,h'''\,0\,k\,k-1\,h''\,\overline{\lambda})\ ;$$

et

$$B_2 = \frac{\overline{\lambda}-1}{h} B_1 = (k+1\,\overline{k}-1\,h\,k\,\overline{\lambda}-1\,h'\,\overline{1}-1,\\ k+1\,k\,k-1\,h''\,\overline{\lambda}\,\overline{\lambda}-1\,h'''0)\,.$$

Puisque $k = \overline{\lambda+1} - 1$, on a bien

$$B_2 = (k+1\,\hat{g}', k+1\,\hat{f}')\,,$$

ce qui établit la propriété.

Références

[1] A. Lentin, Equations dans les monoïdes libres (Gauthier-Villars, Paris, Mouton, La Haye, 1972).

[2] M. Morcrette, π-systèmes bipermutationnels, dans: Permutations, Actes du Colloque tenu à Paris, Université René Descartes (juillet 1972).